ECAM - LYON **CONCOURS D'ADMISSION 1991**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Il sera tenu un grand compte de la rigueur et de la qualité de la rédaction. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération.

EXERCICE

On désigne par S la surface d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$ dans un repère orthonormé et par Σ l'ensemble des projections orthogonales de l'origine O sur les plans tangents à S. Calculer la mesure du volume intérieur à Σ.

PROBLEME

Partie I Etude de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$

On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$.

1°) Montrer que l'on peut limiter l'étude de la série à $x \in]0\ \pi[$

2°) Montrer : $(\forall x \in]0\ \pi[)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \left| \sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x) \right| \leq \frac{2}{(n+1)\sin \frac{x}{2}}$

3°) En déduire l'étude de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$

4°) Pour x fixé dans $]0\ \pi[$ on considère la série entière : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} t^n$

a) Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à 1.

b) On définit l'application f : $\begin{cases}]0\ \pi[\times]-1\ 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} t^n \end{cases}$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ existe et la calculer.

En déduire une expression de f(x, t).

5°) On pose $g(x) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t<1}} f(x, t)$; $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$; $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n}$

et $S_N(x, t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n} t^n$.

a) Montrer que g(x) existe

) Montrer que $\left|S_N(x, t) - f(x, t)\right| \leqslant \dfrac{2}{(N+1)\sin^2 x}$

) Montrer que $S(x) = g(x)$.

6°) a) Déduire de cette étude une expression de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ sous forme de fonctions élémentaires pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

b) Donner la somme de la série $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p}$

c) Calculer $\int_0^{\pi} (\ln(2 \sin \frac{t}{2}))^2 \, dt$. (On rappelle le résultat $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

Partie II Pour $r \in]0 \quad 1[$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :
$K_r(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r\cos x + r^2) + \frac{1}{2} \ln 2$

On désigne par P_0 l'espace vectoriel des applications continues, 2π-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $u \in P_0$ on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier. On désigne par S_0 le sous-espace vectoriel de P_0 des applications u telles que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ est absolument convergente (ce qui veut dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1} v_{-n}$ sont toutes les deux absolument convergentes)

On considère l'application ϕ_r qui à tout élément u de P_0 associe :

$$\phi_r(u) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \int_{-\pi}^{+\pi} K_r(x-t)\, u(t)\, dt \end{cases}$$

°) a) Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément alle est la série de Fourier de sa somme.

b) Montrer que tout élément u de P_0 est la somme de sa série de Fourier.

°) On désigne par $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de Fourier de $x \longmapsto K_r(x)$

rappel : $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} K_r(x) e^{-inx} dx$)

éduire de la première partie les coefficients C_n.

°) On fixe r dans $]0 \quad 1[$. Montrer que pour $u \in S_0$ la série d'applications $\longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in(x-t)} u(t)$ est uniformément convergente.

°) Soit $f \in S_0$ telle que, de plus, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n f_n$ est absolument convergente.

our $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n r^{|n|} e^{inx}$

ontrer que l'équation $\phi_r(u) = f_r$ admet une unique solution u dans S_0

) Montrer que $\phi_1(u)(x)$ est définie par une intégrale généralisée convergente.

A SUIVRE

6°) On admet le résultat : $\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \phi_r(u)(x) = \phi_1(u)(x)$

Démontrer : $\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} f_r(x) = f(x)$

(on commencera par prouver que $|r^{|n|} - 1| \leq |n|\,(1 - r)$ pour $0 < r \leq 1$

En déduire que u est solution du problème (Π) :

$u \in P_0$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \int_{-\pi}^{+\pi} (-\tfrac{1}{2} \ln 2 - \ln|\sin(x-t)|)\, u(t)\, dt = f(x)$

Partie III Résolution du problème (Π) sur un exemple.

Pour θ élément fixé dans $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ on considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \dfrac{1}{1 - \sin\theta \cos x} \end{cases}$$

1°) x étant un réel, développer en série entière à l'origine l'application

$$f_x : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \longmapsto \dfrac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos x} \end{cases}$$

(On distiguera $x \notin \pi\mathbb{Z}$ et $x \in \pi\mathbb{Z}$)

Donner le rayon de convergence de la série.

2°) En déduire la série de Fourier de f.

3°) Résoudre le problème (Π) avec la fonction f donnée dans cette partie.
La fonction u sera d'abord donnée sous forme de somme d'une série trigonométrique puis sous forme élémentaire utilisant la fonction $t \longmapsto \cos t$.

Partie IV Etude de quelques propriétés de ϕ_r.

$r \in]0\ \ 1[$. On considère pour $u \in P_0$ l'application $\phi_r(u)$ définie dans la partie II.

1°) Montrer que $\phi_r(u) \in P_0$.

2°) On munit P_0 du produit scalaire : $\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} u(t)\, v(t)\, dt$

Montrer : a) $(\forall (u, v) \in P_0 \times P_0) \langle \phi_r(u), v \rangle = \langle u, \phi_r(v) \rangle$

b) $(\forall u \in P_0) \langle \phi_r(u), u \rangle \geq 0$ (on pourra utiliser la série de Fourier de K_r)

c) $(\forall u \in P_0) \langle \phi_r(u), u \rangle = 0 \iff u = \tilde{0}$ (application nulle)

3°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'application linéaire ϕ_r.

FIN